Bisimulation: entre Théorie des Modèles de la Logique Modale et Vérification

Raphaëlle Crubillé
mail: raphaelle.crubille@lis-lab.fr

AMU-LIS

Master IMD

Récapitulatif des cours précédents (1)

Theorem (Invariance par bisimulation)

Soit (M, w_1) (N, w_2) *deux structures de Kripke pointées.*
$(M, w_1) \sim (M, w_2) \Rightarrow (M, w_1) \equiv_{LM} (M, w_2)$.

Consequences:

- Construction de modèles:
  e.g. toute formule ϕ satisfiable est satisfiable **à la racine d'un arbre**.
- (Non)-définissabilité: toute classe de structures définissable doit être **stable par bisimulation**.

Récapitulatif des cours précédents (2)

Theorem

Théorème d'Hennessy Milner (M, w_1) *and* (M, w_2) *deux structures de Kripke.*

- $(M, w_1) \sim^{\omega} (M, w_2)$ *ssi* $(M, w_1) \equiv_{LM} (M, w_2)$
- *Si* (M, w_1) *and* (M, w_2) *sont* ***à branchements finis****,* $(M, w_1) \sim (M, w_2)$ *ssi* $(M, w_1) \equiv_{LM} (M, w_2)$*.*

Consequences:

- Propriété du modèle borné:
  e.g. toute formule ϕ satisfiable est satisfiable **à la racine d'un arbre fini** (dont la taille est borné par une fonction de la profondeur modale de ϕ).
  $\Rightarrow$ Décidabilité de la satisfiabilité.
- Pour prouver qu'un modèle d'adversaire contre un language de systèmes a **autant de pouvoir expressif** que la bisimilarité, il suffit de montrer qu'il peut **simuler** toutes les formules de LM.

Aujourd'hui

Théorème de Van Benthem-Rosen: les propriétés expressibles en FOL **et** stable par bisimulation sont exactement les propriétés expressible en LM.
+ LA PREUVE !!!

Logique du premier ordre (Rappel)

Syntaxe

$X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$: ensemble de variables.
Σ : symbole de fonctions + symboles de prédicats.
$\phi, \psi := \top \mid \bot \mid \phi \to \psi \mid \forall x.\psi \mid \exists x.\psi \mid \phi \wedge \psi \mid P(t_1, \ldots, t_n) \mid t_1 = t_2$.

Example

τ, Ψ fixés. On définit une signature $\Sigma_{\tau,\Psi}$ (purement relationelle):

- pas de symboles de fonctions
- symboles de prédicat $\{(R_\alpha, 2) \mid \alpha \in \tau\} \cup \{(\overline{P}, 1) \mid P \in \Psi)\}$.

Exemple de formule: $\forall x_1.\exists x_2.x_1 R_\alpha x_2 \wedge P(x_2)$ avec $P \in \Psi, \alpha \in \tau$.

Modèles de la logique du premier ordre (Rappel)

Definition

Modèles pour la logique du premier ordre $(\mathcal{L}, \mu)$ où:

- une structure $\mathcal{L}$ pour la signature Σ:
  - un ensemble,
  - une interprétation des symboles de fonctions par des fonctions sur X,
  - une interprétation des prédicats par des relations sur X).
- une interprétation des variables μ par des éléments de X.

Example

une structure pour la signature $\Sigma_{\tau,\Psi}$ = une structure de Kripke pour (τ, Ψ).

Definition

ϕ une formule de la logique du premier ordre avec **une** variable libre (x).
$Mod(\phi) = \{(\mathcal{M}, w)$ structure de Kripke pointée tq $(\mathcal{M}, x \mapsto w) \models \phi\}$

Équivalence élémentaire de structures

Dans la suite, on aura besoin de parler d'équivalences entre Kripke structures, vus comme modèles de *FOL*:

Notation:

On fixe une signature Σ.

- Si $(\mathcal{L}, \mu)$ est un modèle, $Th(\mathcal{L}) := \{\phi \in FOL \mid (L, \mu) \models \phi\}$
- Si $\mathcal{L}$ est une structure, $Th(\mathcal{L}) := \{\phi \text{ formule closes tq } \mathcal{L} \models \phi\}$.

Definition (Équivalence élémentaire)

- $\mathcal{L} \equiv_{FOL} \mathcal{L}'$ si $Th(\mathcal{L}) = Th(\mathcal{L}')$;
- $\mathcal{L} \equiv^q_{FOL} \mathcal{L}'$ si $Th^q(\mathcal{L}) = Th^q(\mathcal{L}')$, ou $Th^q(\mathcal{L})$ est la restriction de $Th(\mathcal{L})$ aux formules avec profondeur de quantificateurs $\leq q$;

$\Rightarrow$ On a maintenant deux équivalences logiques sur les structures de Kripke: $(M, w) \equiv_{ML} (M', w',)$, et $(M, w) \equiv_{FOL} (M', w')$.

Formules (de FOL) pertinentes pour les systèmes réactifs

Definition

Une formule de FOL sur $\Sigma_{\tau,\Psi}$ **invariante par bisimulation** si $Mod(\phi)$ est stable par bisimulation:

$$(\mathcal{M}_1, w_1) \in Mod(\phi) \wedge (\mathcal{M}_1, w_1) \sim^{bs} (\mathcal{M}_2, w_2) \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{M}_2, w_2) \in Mod(\phi).$$

Theorem (Non-décidabilité)

L'ensemble des formules ϕ de FOL invariante par bisimulation est indécidable.

Encoder la logique modale en logique du premier ordre

Definition (Langages poly-modaux (Rappel))

$\Psi = \{P, Q, \ldots\}$: un ensemble dénombrable de variable propositionnelles,
$\tau = \{\alpha, \beta, \ldots\}$: un ensemble de *modalités*.
$\phi, \psi \in LM(\Psi, \tau) := \bot \mid P \mid \phi \to \psi \mid \diamond_\alpha \phi$ avec $P \in \Psi, \alpha \in \tau$.

Encoding standard:

$X = x_1, x_2, ..., x_n, ...$ (on a ordonné les variables).

- Encoding des fonctions (dans $FO(\Sigma)$):

$$[\![\top]\!]^j = \top; \quad [\![\phi_1 \to \phi_2]\!]^j = [\![\phi_1]\!]^j \to [\![\phi_2]\!]^j; \ldots$$
$$[\![P]\!]^j = \overline{P}(x_j)$$
$$[\![\diamond_\alpha \phi]\!]^j = \exists x_{j+1}.(x_j R_\alpha x_{j+1} \wedge [\![\phi]\!]^{j+1})$$

Correction de l'encoding

On veut que cet encoding soit **correct**, c'est à dire que $\phi \in LM(\tau, \Phi)$ soit satisfiable ssi $[\![\phi]\!]^j$ est satisfiable.

Remarque

- La formule FO $[\![\phi]\!]^i$ a seulement x_i comme variable libre:

  $\Rightarrow$ un modèle de $[\![\phi]\!]^i = \begin{cases} \text{une structure de Kripke } \mathcal{L} \\ +w \in \mathcal{L} \text{ pour interpréter } x_i \end{cases}$.

Proposition

Soit $(\mathcal{L}, w)$ une structure de Kripke pointée.

$$(\mathcal{L}, w) \models \phi \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathcal{L}, (x_i \mapsto w)) \models [\![\phi]\!]^i.$$

Théorème de Van-Benthem - Rosen

Théorème (Van-Benthem - Rosen)

τ, Ψ finis
Une formule de FOL sur $\Sigma_{\tau,\Psi}$ est invariante par bisimulation si et seulement si elle est équivalente à (l'encoding) d'une formule de la logique modale.

Intuition:
La logique modale est la logique du premier ordre pour les propriétés des LTSs invariantes par bisimulation.
$\Rightarrow$ on obtient une **syntaxe décidable** pour ces propriétés.

Vers la preuve du théorème de Van-Benthem - Rosen: un peu de sémantique des jeux

Definition (Jeu)

Un jeu (à 2 joueur, à somme nulle) est donné par:

- un graphe dirigé G, avec un état initial v_0, dont les sommets sont étiquetés par $\{\text{joueur 1}, \text{ joueur 2}\}$,
- des **conditions de victoire** (e.g. une partition des états finaux en états gagnants pour joueur 1 ou joueur 2).

On note:

- P l'ensemble des chemins dans le graphe, qui commencent à v_0.
- étant donné un sommet v, $S(v)$ l'ensemble des sommets v' tel que $v \to v'$ dans G;

Definition (Stratégie)

- Une strategie pour le joueur J est une fonction:

$$s : \{p = v_0, ..., a_n \in P \text{ t.q. } label(a_n) = J\} \to S(a_n).$$

- Une stratégie de J est gagnante si elle fait gagner J dans toutes les parties possibles (i.e. quoi que joue l'autre joueur J').

Jeux d'Ehrenfeucht–Fraïssé pour la logique du premier ordre (1)

Definition (Jeu d'Ehrenfeucht–Fraïssé de profondeur q)

$q \in \mathbb{N}$. On fixe Σ: une signature (sans symboles de fonctions), $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ deux structures sur Σ.
2 joueurs:

- Le "Vérificateur": ce joueur cherche à prouver que les structures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalentes (pour FOL).
- Le "Réfutateur": ce joueur cherche à distinguer les structures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Déroulement du jeu:

Le jeu se déroule en q **tours**.
À chaque tour $i \in \{1, ..., q\}$:

- Le réfutateur joue le premier choisit une structure: $\mathcal{A}$ or $\mathcal{B}$, et un élément r_i dans cette structure
- Le vérificateur joue en deuxième, il choisit un élément v_i dans la **structure non choisie** par le réfutateur.

Intuition

Le vérificateur cherche à trouver v_i qui soit **équivalent** à r_i.

Qui gagne le jeu ?

À la fin du jeux, on obtient deux fonctions $\alpha : \{1, ..., q\} \to \mathcal{A}$ et $\{1, ..., q\} \to \mathcal{B}$ (pour chaque structure, et chaque tour, on se rappelle des éléments choisis, mais on oublie **qui** les a choisi).

- De cette manière, on obtient deux structures sur Σ, avec $\{1, ..., q\}$ comme ensemble d'éléments: $\mathcal{A}_q$ et $\mathcal{B}_q$.
- Le vérificateur gagne si $\mathcal{A}_q$ et $\mathcal{B}_q$ sont isomorphes (avec comme iso la fonction induite par $n \in \mathcal{A}_q \mapsto n \in \mathcal{B}_q$), sinon le réfutateur gagne.

Example

Au tableau, sur des structures de Kripke.

Definition

- $\mathcal{A} \equiv^q_{EF} \mathcal{B}$ quand le vérificateur a une stratégie gagnante sur le jeu d'Ehrenfeucht–Fraïssé de profondeur q.
- $\mathcal{A} \equiv_{EF} \mathcal{B}$ quand le vérificateur a une stratégie gagnante sur le jeu d'Ehrenfeucht–Fraïssé de profondeur q, $\forall q \in \mathbb{N}$.

Theorème Fondamental des jeux d'Ehrenfeucht–Fraïssé

- $\mathcal{A} \equiv^q_{FOL} \mathcal{B}$ si et seulement si $\mathcal{A} \equiv^q_{EF} \mathcal{B}$.
- $\mathcal{A} \equiv_{FOL} \mathcal{B}$ si et seulement si $\mathcal{A} \equiv_{EF} \mathcal{B}$.

Exemples d'applications

- Déterminer quelle est la profondeur de quantificateurs sont nécessaires pour exprimer une classe définissable en FOL
- Prouver qu'une classe de structure n'est pas exprimable en logique du premier ordre. (en fait, ils donnent une **méthodologie complète** pour ce problème).

Théorème (Van-Benthem - Rosen)

τ, Ψ finis
Une formule de FOL sur $\Sigma_{\tau,\Psi}$ est invariante par bisimulation si et seulement si elle est équivalente à (l'encoding) d'une formule de la logique modale.

Lemme clé de la preuve

Si une formule de FOL $\phi(x)$ est invariante par bisimulation, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(x)$ est invariante par n-bisimulation.

Lemme clé $\Rightarrow$ Théorème

Une fois qu'on sait que $\phi(x)$ est invariante par n bisimulation: On uttilise les formules charactéristiques (notées ξ_n ici):

$$(\mathcal{M}, w) \models \phi \Leftrightarrow (\mathcal{M}, w) \models \bigvee_{(\mathcal{M}', w') \in Mod(\phi)} \xi_n^{\mathcal{M}}(w)$$

et la disjunction est finie parce que l'ensemble des formules de LM à profondeur modale $\leq n$ est finie.

Un outil pour le preuve du lemme clé: la n-localité

Lemme clé de la preuve

Si $\phi(x)$ est invariante par bisimulation, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(x)$ est invariante par n-bisimulation.

Definition (n-localité)

Une formule $\phi(x)$ est n-locale si pour toute paire de structures de Kripke pointées $(\mathcal{M}, w)$ et $(\mathcal{M}_0, w_0)$ tels que:

- ce sont des **arbres enracinés**
- elles sont isomorphes quand restreintes au n-voisinnage de w (respectivement w_0)

Alors $(\mathcal{M}, w) \models \phi \Leftrightarrow (\mathcal{M}_0, w_0) \models \phi$.

Observation

Si $\phi(x)$ est invariante par bisimulation et n-locale, alors elle est invariante par n-bisimulation.

$\Rightarrow$ Il suffit de montrer que si $\phi(x)$ est invariante par bisimulation, elle est aussi n-locale.

Proposition

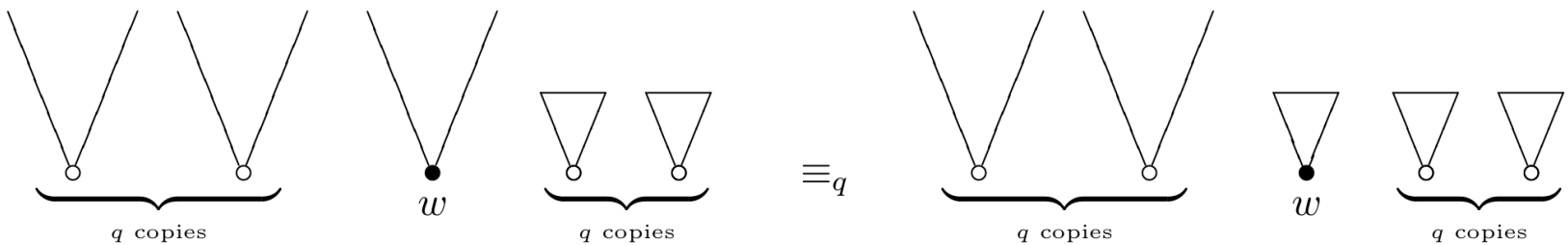
Si $\phi(x)$ est une formule de FOL invariante par bisimulation, elle est n-locale, for $n = 2^q - 1$ (q: profondeur de quantificateurs de ϕ).

Proof.

On suppose $(\mathcal{M}, w)$ et $(\mathcal{M}_0, w_0)$ qui sont des arbres enracinés, et isomorphes quand restreintes au n-voisinnage de w (respectivement w_0).
On doit montrer: $(\mathcal{M}, w) \models \phi \Leftrightarrow (\mathcal{M}_0, w_0) \models \phi$.
Comme on sait que ϕ est **invariante par bisimulation**, et donc invariante par union disjointe, on voit qu'il suffit de montrer:

$$(\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}, w) \models \phi \Leftrightarrow (\mathcal{M}_0 \sqcup \mathcal{N}, w_0) \models \phi,$$

où $\mathcal{N} = \sqcup_{1 \leq i \leq q}(\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N})$.
Pour cela, il suffit de montrer: $(\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}, w) \equiv^q_{FOL} (\mathcal{M}_0 \sqcup \mathcal{N}, w_0)$, i.e.:

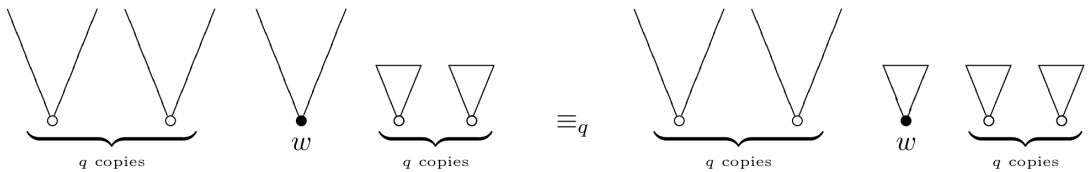


En appliquant le théorème fondamental des jeux d'Ehrenfeucht–Fraïssé, on voit que c'est équivalent à montrer que $(\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}, w) \equiv^q_{EF} (\mathcal{M}_0 \sqcup \mathcal{N}, w_0)$.

Lemma

On suppose $(\mathcal{M}, w)$ *et* $(\mathcal{M}_0, w_0)$ *qui sont des arbres enracinés, et isomorphes quand restreintes au n-voisinnage de* w *(respectivement* w_0*). On note* $\mathcal{N} = \sqcup_{1 \leq i \leq q}(\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N})$*. Alors* $(\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}, w) \equiv^q_{EF} (\mathcal{M}_0 \sqcup \mathcal{N}, w_0)$*.*

Proof.

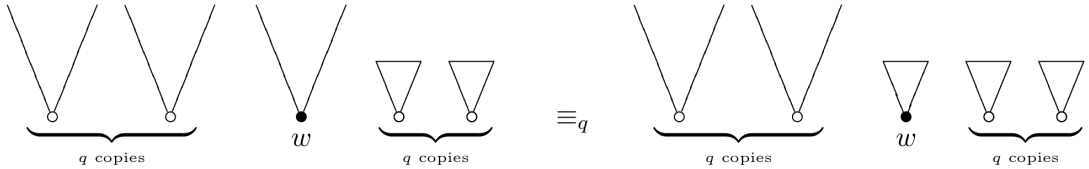


On doit montrer qu'il existe une stratégie gagnante pour le vérificateur, dans le jeu d'Ehrenfeucht–Fraïssé à q tours.

Idée

Le vérificateur va chercher à vérifier un **invariant**, qui doit rester vrai à chaque tour, et qui à chaque tour garantit l'isomorphisme des structures induites A_i, B_i.

□



Le vérificateur veut garantir l'invariant: à chaque tour $i \leq q$, si on note $s_1, ..., s_i$ les élements choisis à gauche, et $t_1, ..., t_i$ les éléments choisis à droite:

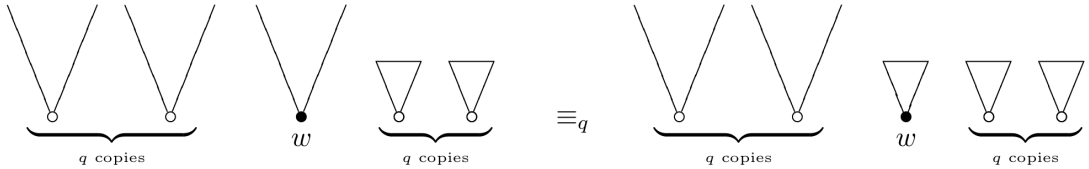
$$\forall\, 1 \leq k, j \leq i, \quad d(s_k, s_j) \leq 2^{q-i} \Leftrightarrow d(t_k, t_j) \leq 2^{q-i}$$
$$\forall\, 1 \leq k, j \leq i,\ d(s_k, s_j) \leq 2^{q-i} \Rightarrow \quad (s_k \leq s_j \Leftrightarrow t_k \leq t_j)$$
$$\forall\, 1 \leq k \leq i, \quad s_k = w \Leftrightarrow t_k = w_0$$

Pourquoi ?

Parce que ça veut dire qu'après q tours (à la fin du jeu):

- $\forall\, 0 \leq k, j \leq q, (\exists$ une arrête dans A entre s_k et $s_j) \Leftrightarrow$ $(\exists$ une arrête dans B entre t_k et $t_j)$.
- de plus, si il existe une arrête dans A entre s_k et s_j, alors celle entre t_k et t_j est orientée dans la même direction.

En conséquence: $\forall k, j \in \{1, ..., q\}, (kRj$ dans $A_q) \Rightarrow (kRj$ dans $B_q)$, et (initial(k) dans $A) \Leftrightarrow$ (initial(k) dans $B)$.
On peut en déduire que les structures induites par $\{s_1, ..., s_q\}$ et $\{t_1, ..., t_q\}$ sont isomorphes.



Le vérificateur veut garantir l'invariant:

$$\forall\, 1 \leq k, j \leq i, \quad d(s_k, s_j) \leq 2^{q-i} \Leftrightarrow d(t_k, t_j) \leq 2^{q-i} \tag{1}$$

$$\forall\, 1 \leq k, j \leq i,\ d(s_k, s_j) \leq 2^{q-i} \Rightarrow \quad (s_k \leq s_j \Leftrightarrow t_k \leq t_j) \tag{2}$$

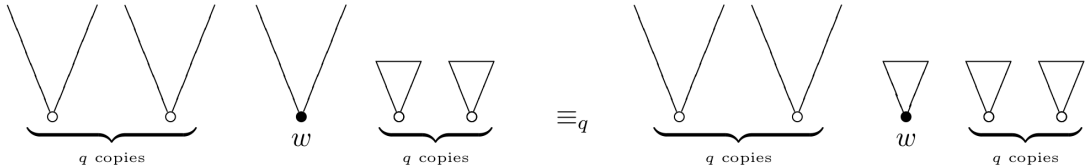
$$\forall\, 1 \leq k \leq i, \quad s_k = w \Leftrightarrow t_k = w_0 \tag{3}$$

Attention:

Cet invariant doit rester vrai **quelque soit** la stratégie du réfutateur.

Au tour i (avec $1 \leq i \leq q$):

- si le réfutateur choisit l'élément w à gauche, le vérificateur répond w_0 à droite (à cause de (3));
- Si le réfutateur choisit un élément s à distance $\geq d_i = 2^{q-i}$ de tous les $s_1, \ldots, s_{i-1}$ déjà choisis, et aussi de w_0 et w, alors le vérificateur choisit l'élément correspondant dans une copie non uttilisée (de $\mathcal{M}$ ou $\mathcal{M}_0$, selon si s était dans une copie de $\mathcal{M}$ ou $\mathcal{M}_0$)



Le vérificateur veut garantir l'invariant:

$$\forall\, 1 \leq k, j \leq i, \quad d(s_k, s_j) \leq 2^{q-i} \Leftrightarrow d(t_k, t_j) \leq 2^{q-i} \tag{1}$$

$$\forall\, 1 \leq k, j \leq i,\ d(s_k, s_j) \leq 2^{q-i} \Rightarrow \quad (s_k \leq s_j \Leftrightarrow t_k \leq t_j) \tag{2}$$

$$\forall\, 1 \leq k \leq i, \quad s_k = w \Leftrightarrow t_k = w_0 \tag{3}$$

Au tour i (avec $1 \leq i \leq q$):

- Si le réfutateur choisit un élément s à distance $\leq 2^{q-i}$ d'un ou plusieurs éléments $s_{i_1}, ...s_{i_j}$ déjà choisis (ou de w,w_0), avec $0 \leq i_k \leq i-1$.
  On a : $\forall k, k' \in \{i_0, ..., i_j\}$,
  $d(s_k, s_{k'}) \leq d(s_k, s) + d(s, s_{k'}) \leq 2 * 2^{q-i} \leq 2^{q-(i-1)}$.
  En conséquence, on déduite de l'invariant pour $(i-1)$:
  $\forall k, k' \in \{i_0, ..., i_j\},\ d(t_k, t'_k) \leq 2^{q-(i-1)}$
  (en particulier, tous les $s_{i_0}, .., s_{i_j}$ sont dans une même copie de $\mathcal{M}$ ou $\mathcal{M}_0$, et pareil pour les $t_{i_0}, ..., t_{i_j}$). De plus, on peut montrer que les (s_{i_j}) et les (t_{i_j}) sont dans la "même couleur" ssi $0 \notin \{i_1, ..., j_1\}$. Comme $\mathcal{M}$ **et** $\mathcal{M}_0$ **sont isomorphes quand restreint à un voisinnage de** $2^q - 1$ **de** w, w_0, on peut donc prendre t_i l'élément correspondant à s_i dans la copie des (t_{i_j}), et on préserve l'invariant.

Théorème de Van-Benthem - Rosen

Théorème (Van-Benthem - Rosen)

τ, Ψ finis
Une formule de FOL sur $\Sigma_{\tau,\Psi}$ (de profondeur de quantificateur q) est invariante par bisimulation si et seulement si elle est équivalente à (l'encoding) d'une formule de la logique modale (de profondeur modale $\leq 2^q - 1$).

Remarque:

La borne est optimale.

Extensions du théorème de Van-Benthem Rosen (1)

Version théorie des modèles finis [Rosen]

Une formule de FOL sur $\Sigma_{\tau,\psi}$ est invariante par bisimulation sur les structures de Kripke finies si et seulement si elle est équivalente sur les structures de Kripke finies à (l'encoding) d'une formule de la logique modale.

Proof.

- la preuve "classique" (par argument de compacité) ne peut pas être étendue
- la preuve par jeux (celle qu'on vient de voir) peut être adaptée.

□

Extensions du théorème de Van-Benthem Rosen (2)

Théorèmes de caractérisations pour des variantes de LM

- Variations de la notion sous-jacente de bisimulation
  e.g. "two-ways bisimulation" $\leftrightarrow$ "past modalities" en logique modale.
- Extension de la notion d'invariance (on garde la notion de bisimulation, mais on renforce la signification de: "2 structures sont équivalente par bisimulation")
  e.g. $LM[\forall] :=$ LM $+$ quantificateurs.

Conclusion

Le théorème de Van-Benthem Rosen est stable par des variations de la logique modale/ de la bisimulation.
$\Rightarrow$ c'est un théorème **significatif** de la théorie des modèles de la logique modale.

Une extension de la logique modale: LM[$\forall$] (Gorenko - Passy'92)

Intuition

On veut exprimer dans les formules logiques des transitions explicite de la **sémantique globale** à la **sémantique locale.**

Definition (Logique modale avec quantificateurs: LM[$\forall$])

$\Psi = \{P, Q, \ldots\}$: un ensemble dénombrable de variable propositionnelles,
$\tau = \{\alpha, \beta, \ldots\}$: un ensemble de modalités.

$$\phi, \psi \in LM(\Psi, \tau) := \bot \mid P \mid \phi \to \psi \mid \Diamond_\alpha \phi \mid \forall.\phi \mid \exists.\phi \qquad \text{avec } P \in \Psi, \alpha \in \tau.$$

Definition (Modèles for L[$\forall$])

On ajoute à la définition de la validité:

$$(\mathcal{M}, w) \models \forall\phi \quad \text{when} \quad \forall w' \in \mathcal{M},\ (\mathcal{M}, w') \models \phi;$$
$$(\mathcal{M}, w) \models \exists\phi \quad \text{when} \quad \exists w' \in \mathcal{M},\ (\mathcal{M}, w') \models \phi;$$

Un exemple de modalité exprimable en $LM[\forall]$

Example (La modalité "si et seulement si")

On peut exprimer en $LM[\forall]$:

$$(\mathcal{M}, w) \models \boxtimes\phi \quad \text{when} \quad (w\, R_{\mathcal{M}}\, z \Leftrightarrow (\mathcal{M}, z \models \phi))$$

Proposition

- *on peut écrire une axiomatisation complete de* $K + \forall$
- *cette axiomatisation est décidable.*

Bisimulation globale entre structure de Kripke pointées.

Definition

Deux structures de Kripke pointées $(\mathcal{M}, w)$ et $(\mathcal{M}', w')$ sont **globalement bisimilaires** si il existe une bisimulation R sur $\mathcal{M} \cup \mathcal{M}'$ tel que:

- $w \, R \, w'$;
- $\forall s \in \mathcal{M}$, $\exists t \in \mathcal{M}'$ such that $s \, R \, t$;
- $\forall t \in \mathcal{M}'$, $\exists s \in \mathcal{M}$ such that $s \, R \, t$;

Example

- deux structures de Kripke pointées globalement bisimilaire
- deux structures de Kripke pointées bisimilaires, mais non globalement bisimilaires.

Theorem

*A formula $\phi(x)$ of FOL est invariante par **bisimulation globale** ssi elle est équivalente à (l'encoding d') une formule de LM[$\forall$].*